確率数理工学8

◎ 確率不等式

Thm ☆ 重要

(1) Markovの不等式

X: r.v.

$X \geq 0$ (a.s.) とする.

$\forall \varepsilon > 0$ で

$$P(X \geqq \varepsilon) \leqq \frac{E[X]}{\varepsilon}$$

(2) Chebyshevの不等式

$$P(|X - E[X]| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{Var[X]}{\varepsilon^2}$$

Proof (1)

$$\begin{aligned} E[X] &= E[X \mathbb{1}\{X \geqq \varepsilon\} + X \mathbb{1}\{X < \varepsilon\}] \\ &\geqq E[\varepsilon \mathbb{1}\{X \geqq \varepsilon\}] + 0 \\ &= \varepsilon \cdot E[\mathbb{1}\{X \geqq \varepsilon\}] = \varepsilon P(X \geqq \varepsilon) \quad // \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(|X - E[X]| \geqq \varepsilon) &= P(|X - E[X]|^2 \geqq \varepsilon^2) \\ &\underset{\text{Markov}}{\leqq} \frac{E[|X - E[X]|^2]}{\varepsilon^2} = \frac{Var[X]}{\varepsilon^2} \quad // \end{aligned}$$

例. $X = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ (X_i: i.i.d., $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$)

$\Longrightarrow Var[X] = \frac{1}{n}\sigma^2 \Longrightarrow P(|X - E[X]| \geqq \varepsilon) \leqq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

$\Longrightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon'$ とおきなおせば. $P\left(|X - E[X]| \geqq \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\varepsilon'\right) \leqq \frac{1}{\varepsilon'^2}$

$\Longrightarrow |X - E[X]| = O_p\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$: 重要

Cor (Markovの不等式の一般化)

φ: 単調増加 かつ $\varphi(x)>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$, 可測

$$P(X\geqq a)\leqq\frac{E[\varphi(X)]}{\varphi(a)}\quad(\forall a\in\mathbb{R})$$

$(\because)$ Markovの不等式より $P(X\geqq a)=P(\varphi(X)\geqq\varphi(a))\leqq\dfrac{E[\varphi(X)]}{\varphi(a)}$ //

Cor

$$P(X\geqq a)\leqq\frac{E[e^{tX}]}{e^{ta}}\quad(\forall t\geqq 0,\ a\in\mathbb{R})$$

※ モーメント母関数を用いてXの確率が評価できる.

$\longrightarrow$ 様々な確率集中不等式に用いられている.

Thm (Hoeffdingの不等式) ☆

$X_1,\dots,X_n$: 独立 s.t. $a\leqq X_i\leqq b$ $(\forall i=1,2,\dots,n)$ ← 同一である必要はない

$E[X_i]=0$ とする.

このとき.

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\geqq\varepsilon\right)\leqq\exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

$\left(P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\geqq\varepsilon\right)\leqq 2\exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)\right.$ でもある$\Big)$

Note

$\varepsilon=\dfrac{b-a}{\sqrt{2n}}t$ とおけば

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|\geqq\frac{b-a}{\sqrt{2n}}t$$

である確率が $2e^{-t^2}$ 以下である. $\Longrightarrow$ $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|=O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\longrightarrow$ 大数の法則, 中心極限定理

☆ 先のChebyshevの不等式と比べ, 確率が

$O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ ではなく $O(e^{-t^2})$ になっている.

(2乗) (指数)

$\longrightarrow$ X_iの有界性を用いてよりタイトな確率評価になっている.

Proof $\quad P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \geqq \varepsilon\right) \leqq \dfrac{\underline{E[e^{t\sum X_i}]}}{e^{nt\varepsilon}} \quad (t>0)$

$$= \frac{\prod_{i=1}^{n} E[e^{tX_i}]}{e^{nt\varepsilon}} \quad (\because \text{独立})$$

$E[e^{tX_i}]$ を評価する.

$a \leqq X_i \leqq b$ より. $\quad X_i = \alpha b + (1-\alpha)a \quad \left(\alpha = \frac{X_i - a}{b-a} \text{ と書く}\right)$

$\boxed{0 \leqq \alpha \leqq 1}$

$x \mapsto e^{tx}$ の凸性より

$$e^{tX_i} \leqq \alpha e^{tb} + (1-\alpha)e^{ta}$$

である. 右辺の期待値をとると.

$$E[e^{tX_i}] \leqq E[\alpha]e^{tb} + E[1-\alpha]e^{ta}$$

$$= -\frac{a}{b-a}e^{tb} + \frac{b}{b-a}e^{ta}$$

$$= p e^{tb} + (1-p)e^{ta}$$

$$\left(\text{ただし. } p = -\frac{a}{b-a} \geqq 0\right)$$

$\psi(t) = \ln\left(pe^{tb} + (1-p)e^{ta}\right)$ とおくと

これは $P(Z=b)=p,\ P(Z=a)=1-p$ なる Z のキュムラント母関数

$\psi(0) = \ln(1) = 0$

$$\psi'(0) = \left.\frac{pbe^{tb} + (1-p)ae^{ta}}{pe^{tb} + (1-p)e^{ta}}\right|_{t=0} = 0 \quad (\text{平均})$$

$$\psi''(t) = \frac{pb^2e^{tb} + (1-p)a^2e^{ta}}{pe^{tb} + (1-p)e^{ta}} - \frac{(pbe^{tb} + (1-p)ae^{ta})^2}{(pe^{tb} + (1-p)e^{ta})^2}$$

$\Rightarrow \quad p_t = \dfrac{pe^{tb}}{pe^{tb} + (1-p)e^{ta}}$ とおき.

Z_t を $P(Z_t = b) = p_t,\ P(Z_t = a) = 1-p_t$ なる r.v. とおると.

$$\psi''(t) = b^2p_t + a^2(1-p_t) - (bp_t + a(1-p_t))^2$$

$$= Var[Z_t] = Var\left[Z_t - \frac{a+b}{2}\right] \leqq E\left[\left(Z_t - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \leqq \frac{(a-b)^2}{4}$$

すると.

$$\psi(t) = \psi(0) + t\psi'(0) + \frac{1}{2}t^2\psi''(\tilde{t}) \quad (0 \leq \tilde{t} \leq t)$$

$$\leqq \ 0 \ + \ 0 \ + \frac{1}{8}t^2(a-b)^2$$

よって.

$$E[e^{tX_i}] \leqq \exp\left(\frac{t^2}{8}(b-a)^2\right) \quad ({}^\forall t \geqq 0).$$

これより

$$\frac{\prod_{i=1}^n E[e^{tX_i}]}{e^{tn\varepsilon}} \leqq \exp\left(\frac{nt^2}{8}(b-a)^2 - tn\varepsilon\right)$$

ここで. $t = \dfrac{4\varepsilon}{(b-a)^2}$ を代入すれば

$$\text{右辺} \leqq \exp\left(\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2} - \frac{4n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

- $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right|$ については $P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right| \geqq \varepsilon\right) \leqq P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \geqq \varepsilon\right) + P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (-X_i) \geqq \varepsilon\right)$ から従う. //

Note

- $a_i \leqq X_i \leqq b_i$ のように a, b が i に依存するとき.

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \geqq \varepsilon\right) \leqq \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2}\right)$$

と拡張できる.

- 証明より

$$E[e^{tX_i}] \leqq e^{\frac{t^2}{2}\sigma^2} \qquad ({}^\forall i): \text{sub-Gaussian}$$

← Gaussより裾が軽ければ成り立つ

なら. X_i が有界でなくても

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \geqq \varepsilon\right) \leqq \exp\left(-\frac{n\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

が成り立つ.

Thm (Bernsteinの不等式)

$X_1, \dots, X_n$: 独立 (同一とは限らない)

$E[X_i]=0$, $Var[X_i] \leq \sigma^2$, $|X_i| \leq M$ (a.s)

なら、

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma^2+\frac{2M}{3}t}\right) \quad (t \geq 0)$$

⟹ 分散の情報を活かしている。

分散が小さければ、よりタイトなバウンドを得る。

※ Hoeffding, Bernstein およびその拡張は統計や学習理論で ~~頻~~ 頻繁に用いられている。

$\boxed{\text{参考}}$ Thm (Gaussian 集中不等式)

$X_1, \dots, X_N$ は独立同一に標準正規分布に従うとする。

$f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ が L-リプシッツ連続とする。

$$P(f(X_1,\dots,X_n) - E[f(X_1,\dots,X_n)] \geq t) \leq e^{-\frac{t^2}{2L^2}} \quad (\forall t>0)$$

※ 確率が次元 n に依存しない!

ある有界な関数クラス $\mathcal{G}$ に対し

$$f(x_1,\dots,x_n) := \sup_{g\in\mathcal{G}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i g(z_i) \quad (z_i \text{は固定})$$

として用いたりする。 ⟶ ノンパラ回帰、学習理論で現れる (Gaussian width)

Thm (Talagrandの集中不等式)

$\mathcal{G}$: $\|\cdot\|_\infty$-ノルムに関して可分な関数クラス

$\forall g \in \mathcal{G}$ で $E[g(X)]=0$, $Var[g] \leq \sigma^2$, $\|g\|_\infty \leq M$ なら

$$P\left(\sup_{g\in\mathcal{G}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(X_i) \geq 2E\left[\sup_{g\in\mathcal{G}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g(X_i)\right] + \sqrt{\frac{2t\sigma^2}{n}} + \frac{2M}{n}t\right) \leq e^{-t}$$

⟶ これも頻出の不等式

② 確率変数列の収束 ☆重要

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$: prob. sp.

$X_1, X_2, \ldots$: r.v. の列 on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

X: 別の r.v.

F_k: X_kの分布関数

F: Xの分布関数

Def (確率変数列の収束) ☆重要

1. 概収束 (convergence almost surely)

$$X_n \xrightarrow{a.s.} X \overset{def}{\Longleftrightarrow} P\left(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$$

2. 確率収束 (convergence in probability)

$$X_n \xrightarrow{p} X \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geqq \varepsilon) = 0$$

3. p次平均収束, L^p-収束 (conv. in p-th degree mean, conv. in L^p)

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \overset{def}{\Longleftrightarrow} \|X_n - X\|_p \longrightarrow 0 \qquad (p \geq 1)$$

4. 法則収束 (convergence in law, distribution
weak convergence)

$$X_n \rightsquigarrow X \overset{def}{\Longleftrightarrow} \text{全ての } F(x) \text{の連続点 } x \text{ において}$$

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

//

※ ・ L^p-空間は L^p-収束に関して完備 (任意のコーシー列が L^p-空間内で収束先を持つ)

$\Longrightarrow$ L^p-空間は Banach空間

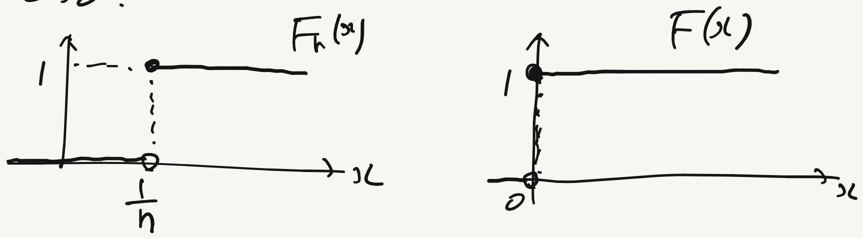
• 法則収束について.

– Fの連続点についてのみ定義している理由:

X_n を $P(X_n = \frac{1}{n}) = 1$ なる r.v.

X を $P(X=0)=1$ なる r.v.

とする.



$\frac{1}{n} \to 0$ より. $X_n \rightsquigarrow X$ と思いたい.

しかし. $\lim_{n\to\infty} \underbrace{F_n(0)}_{=0} \neq \underbrace{F(0)}_{=1}$ より 不連続点 $x=0$ では

収束が成り立たない. ⟶ 不連続点は除外した方が都合良い.

– 弱収束とも言う.

別定義 (Portmanteauの定理)

$$\boxed{\textcircled{A}\ \bullet\ X_n \rightsquigarrow X \iff {}^\forall f: \text{有界連続 に対し.}\quad E[f(X_n)] \longrightarrow E[f(X)]}$$

• 任意の閉集合 A に対し.

$$\limsup P(X_n \in A) \le P(X \in A)$$

• 任意の開集合 B に対し.

$$\liminf P(X_n \in B) \ge P(X \in B)$$

(cf. C_0: 有界連続関数で $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$ なる関数の集合

C_0 上の任意の有界線形写像 Φ は

ある正則 Borel 測度 μ を用いて

$$\Phi(f) = \int f \, d\mu$$

と書ける. (Rieszの表現定理))

補足

$\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ （非負Borel測度）

μ^*：μにより定めた外測度

Def.

(1) μは正則Borel $\iff$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ s.t. $A \subseteq B$ かつ $\mu^*(A) = \mu(B)$.

(2) μはRadon $\iff$ 正則Borelかつ、任意のコンパクト集合$K \subseteq \mathbb{R}^d$に対し、$\mu(K) < \infty$.

C_c：コンパクト台を持つ有界連続関数の集合.

Thm（リースの表現定理）

$L : C_c \to \mathbb{R}$ を線形汎関数とし、

$$\sup\{L(f) \mid f \in C_c,\ \|f\|_\infty \leq 1,\ \mathrm{supp}(f) \subseteq K\} < \infty$$

が任意のコンパクト集合$K \subseteq \mathbb{R}^d$に対して成り立つものとする

すると、あるRadon測度μとμ-可測関数σで$|\sigma(x)| = 1$ (μ-a.e.) なるものが存在して、

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \sigma \, d\mu$$

とできる.

Radon測度の汎弱収束（weak*-convergence）

以下は同値.

(1) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \int f \, d\mu_k = \int f \, d\mu$ $(\forall f \in C_c)$

(2) 任意のコンパクト集合Kに対し、$\displaystyle\limsup_{k\to\infty} \mu_k(K) \leq \mu(K)$ かつ 任意の開集合Uに対し、$\displaystyle\mu(U) \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(U)$.

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \mu_k(B) = \mu(B)$ が任意の有界ボレル集合Bで$\mu(\partial B) = 0$なるBに対して成り立つ.

narrow topologyにおける測度の収束（狭位相）

$$\lim_{k\to\infty} \int f \, d\mu_k = \int f \, d\mu \quad (\forall f : \text{有界連続})$$

有界な場合：
（つまり、$\mu(\mathbb{R}^d) < \infty$, $\mu_n(\mathbb{R}^d) < \infty$のとき）
1. $\mu_n \to \mu$（狭位相）
2. $\mu_n \to \mu$（汎弱）かつ $\mu_n(\mathbb{R}^d) \to \mu(\mathbb{R}^d)$

は同値. ⇒確率測度なら等価

汎弱収束しても狭位相で収束しない例

$f(x) = \sin(\pi x + \frac{\pi}{2})$, $\mu_k = \delta_k$, $\mu = 0$ とすると. $\delta_k \to \mu$（汎弱）でも $\delta_k \not\to \mu$（狭位相）.

Thm（収束間の関係性）

(1) $X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$

(2) $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \rightsquigarrow X$

(3) $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$

$$\begin{tikzcd}
\text{概収束} \arrow[r] & \text{確率収束} \arrow[r] & \text{法則収束} \\
& L^p\text{-収束} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Proof (1) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ は

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \ge N} \left\{ |X_n - X| \le \frac{1}{m} \right\} \right) = 1$$

↑ 任意の m に対し、ある N が存在して、任意の $n \geqq N$ で $|X_n - X| \le \frac{1}{m}$ が成立する事象

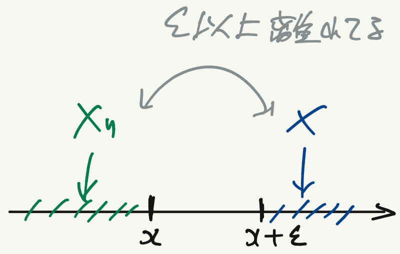
と書き直せる。よって、$\forall \varepsilon > 0$ に対し、十分大きな m_0 をもってくれば $\frac{1}{m_0} \le \varepsilon$ とできて、

$$\begin{aligned}
1 &= P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \ge N} \{\cdots\}\right) \\
&\leqq P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \ge N} \left\{ |X_n - X| \le \frac{1}{m_0} \right\}\right) \\
&= \lim_{N \to \infty} P\left(\bigcap_{n \ge N} \left\{ |X_n - X| \le \frac{1}{m_0} \right\}\right) \\
&\leqq \lim_{N \to \infty} P\left(\left\{ |X_N - X| \le \frac{1}{m_0} \right\}\right) \\
&\leqq \lim_{N \to \infty} P\left(\left\{ |X_N - X| \le \varepsilon \right\}\right)
\end{aligned}$$

つまり、$X_n \xrightarrow{p} X$ である。

(2) x を F の連続点とする.

$$F_n(x) = P(X_n \leq x)$$
$$= P(\{X_n \leq x\} \cap \{X \leq x+\varepsilon\}) + P(\{X_n \leq x\} \cap \{X > x+\varepsilon\})$$
$$\leq \underbrace{P(X \leq x+\varepsilon)}_{= F(x+\varepsilon)} + \underbrace{P(|X_n - X| \geq \varepsilon)}_{\to 0 \ (n\to\infty)} \quad (\because X_n \xrightarrow{P} X)$$



$$F(x-\varepsilon) = P(X \leq x-\varepsilon)$$
$$= P(\{X \leq x-\varepsilon\} \cap \{X_n \leq x\}) + P(\{X \leq x-\varepsilon\} \cap \{X_n > x\})$$
$$\leq \underbrace{P(X_n \leq x)}_{= F_n(x)} + \underbrace{P(|X - X_n| \geq \varepsilon)}_{\to 0 \ (n\to\infty)}$$

以上より $F(x-\varepsilon) \leq \liminf F_n(x) \leq \limsup F_n(x) \leq F(x+\varepsilon)$

Fは連続なので. $\varepsilon \to 0$ とすることで.
$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$
を得る.

(3). Markovの不等式より

$\forall \varepsilon > 0$ で: $P(|X_n - X| \leq \varepsilon) \leq \dfrac{E[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p} \longrightarrow 0$

$(\because X_n \xrightarrow{L^p} X)$

//

(注) 弱収束においては X_n と X は同じ prob. sp. 上にいる必要はない.
確率収束と概収束は同じ prob. sp. にいる.

反例

(1) の逆が成り立たない例

（各 n でみると、X_n と X は十分近いが、$(X_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$ と、n を通しての列を考えると $X(\omega)$ に収束しない状況を考えれば良い。）

$\Omega=[0,1)$, P は Ω 上の一様分布

$n=1,2,2^2,2^3,\cdots$ とする。$(n=2^k)$

$$X_{n,i} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \left(\frac{i-1}{n} \leq \omega < \frac{i}{n}\right) \\ 0 & \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases}$$

$k=0$: $X_1 = X_{1,1} = 1$ (a.s.)

$k=1$: $X_2 = X_{2,1} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})}$

$X_3 = X_{2,2} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1)}$

$k=2$: $X_4 = X_{4,1} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{4})}$

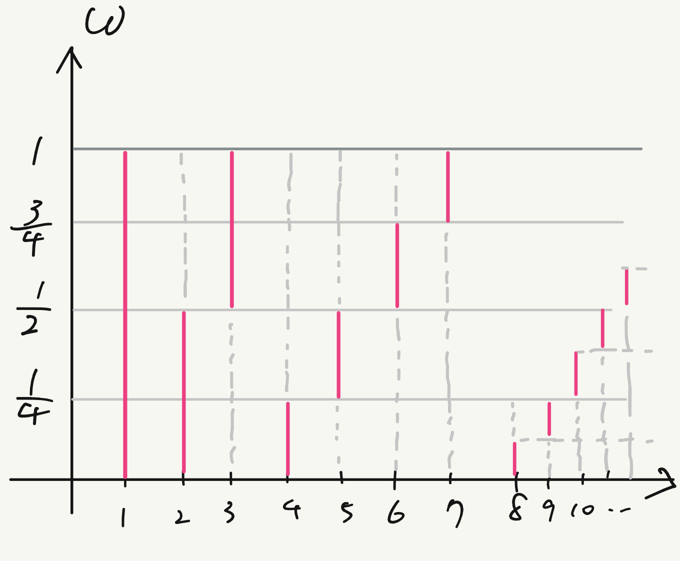
$X_5 = X_{4,2} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2})}$

$X_6 = X_{4,3} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},\frac{3}{4})}$

$X_7 = X_{4,4} = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4},1)}$

$k=3$: $X_8 = X_{8,1} = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{8})}$

$\vdots$



—— で1, それ以外で0.

とすると $P(|X_m| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{2^k}$ (if $2^k \leq m < 2^{k+1}$) $(0 < {}^\forall\varepsilon < 1)$

より $X_m \xrightarrow{P} 0$

しかし、${}^\forall\omega \in [0,1)$ において、$\displaystyle\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) = 1$,

$\displaystyle\liminf_{n\to\infty} X_n(\omega) = 0$ なので、

a.s. で収束もしない。よって、$X_n \xrightarrow{a.s.} X=0$ は成り立たない。 //

(2) の逆が成り立たない例.

$\Omega = \{0, 1\}$ として. $P(\omega=0) = P(\omega=1) = \frac{1}{2}$ とする.

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega=0) \\ 0 & (\omega=1) \end{cases}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega=0) \\ 1 & (\omega=1) \end{cases}$$

とすると. 当然 $|X_n - X| = 1$ (a.s.) なので. $X_n \xrightarrow{P} X$ ではない.

しかし. $F_n(x) = \begin{cases} 0 & (x<0) \\ \frac{1}{2} & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 \leq x) \end{cases} = F(x)$ より.

$F_n(x) = F(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R})$ で. 特に. $X_n \xrightarrow{d} X$ である.

$\lim F_n(x) = F(x)$ でもある.

演習問題

(1) $X_n \xrightarrow{P} X$ なら，ある部分列 $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ が存在して，

$X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$ となることを示せ．

（ヒント：Borel-Cantelli の補題：ノート9）

(2) $\left[\begin{array}{l} (X_n) \text{ が確率収束の意味でコーシー列（コーシー in prob.）} \\ \iff \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \text{ に対し，} \exists N \text{ で} \\ \qquad P(|X_n - X_m| \geq \varepsilon) \leq \delta \quad (\forall n, m \geq N) \end{array} \right]$

とする．

(a) $X_n \xrightarrow{P} X$ なら $(X_n)_n$ はコーシー列 in prob. であることを示せ．

(b) $(X_n)_n$ がコーシー in prob. のとき，ある r.v. X が存在し，

$X_n \xrightarrow{P} X$ となることを以下の手順で示せ：

(i) ある部分列 $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ が存在して，

$$P(|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > 2^{-j}) < 2^{-j}$$

とできることを示せ．

(ii) X_{n_j} は a.s. で収束することを示せ（ヒント：Borel-Cantelli）

その収束先を X とおく．（X は可測）

(iii) $X_n \xrightarrow{P} X$ を示せ．

(3)「$(X_n)_n$ が一様可積分 $\iff \lim_{a \to \infty} \sup_n \int_{|X_n| \geq a} |X_n| \, dP \to 0$」

とする．

(X_n) が一様可積分なら，$\sup_n E[|X_n|] < \infty$ となることを示せ．

(4) X_n は単調増大な r.v. で $X_n \xrightarrow{P} X$ とする．

このとき，$X_n \xrightarrow{a.s.} X$ であることを示せ．

(5) $X_n \xrightarrow{p} X \iff$ 任意の部分列 $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ がさらなる部分列 $(X_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$ を持ち、$X_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.s.} X$ である。

このことを示せ。

(6) $X_n \xrightarrow{p} X$, $Y_n \xrightarrow{p} Y$ のとき

(a) $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X+Y$ を示せ。

(b) $X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$ を示せ ((5)を用いて良い)

(7) $(X_n)_n$: i.i.d. で $E[X_n]=\mu$, $Var[X_n]=\sigma^2$ (ともに有限) のとき

$$\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X}_n)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$$

となることを示せ。

(8) 以下を示せ:

(a) $X_n \xrightarrow{a.s.} 0 \implies \overline{X}_n \left(=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) \xrightarrow{a.s.} 0$

(b) $X_n \xrightarrow{L^p} 0 \implies \overline{X}_n \xrightarrow{L^p} 0$
$(p \geq 1)$

(c) $X_n \xrightarrow{p} 0 \implies \overline{X}_n \xrightarrow{p} 0$ とは限らないことを反例を挙げて示せ。

(d) $\overline{X}_n \xrightarrow{p} 0 \implies \frac{X_n}{n} \xrightarrow{p} 0$

(9) (発展問題) $S \subset \mathbb{R}^d$ をコンパクト集合とする。

S 上のガウス過程 G_u $(u \in S)$ とは、任意の有限個の $\{u_1, \ldots, u_\ell\} \subset S$ に対し、$(G_{u_1}, \ldots, G_{u_\ell})$ が多変量正規分布に従うこととする。

ある2つのS上のGauss過程 G_u, G'_u が

(i) $E[G_u] = E[G'_u] = 0 \quad (\forall u \in S)$

(ii) $E[(G_u - G_v)^2] \leqq E[(G'_u - G'_v)^2] \quad (\forall u, v \in S)$

をみたし、G_u, G'_u がともにa.s.でuについて有界かつ連続であるとする。このとき、

$$E[\sup_{u \in S} G_u] \leqq E[\sup_{u \in S} G'_u]$$

となることが知られている。(Slepianの不等式)

今、S^{d-1} を $\mathbb{R}^d$ 上の単位球面 ($S^{d-1} = \{\|x\| = 1 \mid x \in \mathbb{R}^d\}$) とする。

$(A_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d}$ を A_{ij} が i.i.d. で $N(0,1)$ に従うランダム行列とする。

ある $u \in S^{d-1}, v \in S^{d-1}$ に対し、

$$G_{(u,v)} := u^T A v$$

とする。一方で、g, g' を独立な $\mathbb{R}^d$-値 r.v. とし、$g \sim N(0, I), g' \sim N(0, I)$
(多変量正規分布)

とする。

$$G'_{(u,v)} := u^T g + v^T g'$$

としたとき、

$$E[\sup_{(u,v) \in S^{d-1} \times S^{d-1}} G_{(u,v)}] \leqq E[\sup_{(u,v) \in S^{d-1} \times S^{d-1}} G'_{(u,v)}]$$

を示せ。また、

$$E[\|A\|] \leqq 2\sqrt{d}$$

operator-norm

$$\|A\| := \sup_{\substack{u \in S^{d-1} \\ v \in S^{d-1}}} u^T A v$$

を示せ。

(10)　(9)の設定で，Gaussian集中不等式より

(参考問題)　$P\left(\|A\| \geqq 2\sqrt{d} + t\right) \leqq \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$　$(t>0)$

を示せ．（ランダム行列の作用素ノルム）

(11)　X_i を i.i.d.，非負の r.v. とする．

$M_n = \max_{i=1,\dots,n} X_i$　とする．

(a)　$P(M_n > x) \leqq n P(X_1 > x)$　$({}^{\forall}x > 0)$　を示せ．

(b)　$\frac{M_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \iff n P(X_1 > n) \longrightarrow 0$　$(n \to \infty)$

を示せ．